Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

RECUPERATORIO SEGUNDO PARCIAL - 15/03/2024

Apellido y Nombre: ....

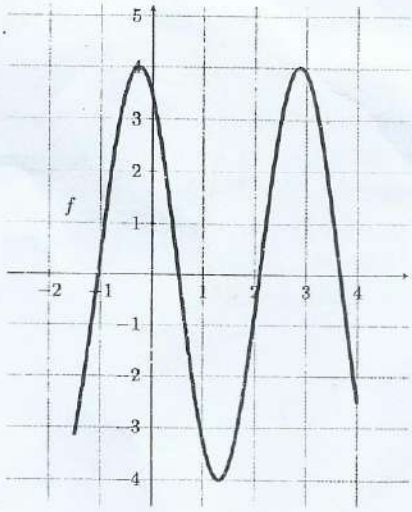
Número de Documento: .... Especialidad:...

TEMA 3

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.

EJERCICIO 1: A continuación se tiene la gráfica de una una función sinusoidal f definida en el intervalo $[-1,5;4]$.



Sabiendo que los primeros dos ceros que se observan tienen como abscisas, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{1}{6}\pi$, dar una expresión analítica de $f(x)$.

EJERCICIO 2:

(a) Desde una altura h_0 se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con velocidad inicial igual a $10\,m/s$. Un segundo después de lanzada la primera se lanza desde el suelo sobre la misma vertical otra pelota con velocidad inical igual a $20\,m/s$. Sabiendo que el encuentro entre ambas pelotas se produjo a los 6 segundos de lanzada la primera pelota, calcular el valor de h_0.

(b) Calcular las componentes del vector $\vec{a}$ si se sabe que $Proy_{\vec{b}}\vec{a} = (4,2)$ y $Proy_{\vec{c}}\vec{a} = \vec{c}$, siendo $\vec{b} = (2,1)$ y $\vec{c} = (-1,2)$.

EJERCICIO 3: Sea $f : D_f \to \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-5|-2}{x+3}}$. Calcular el dominio de f.

EJERCICIO 4: Dadas las funciones $f : D_f \to \mathbb{R}/f(x) = \log(x-2)$ y

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g(x) = x^2 - 4$$

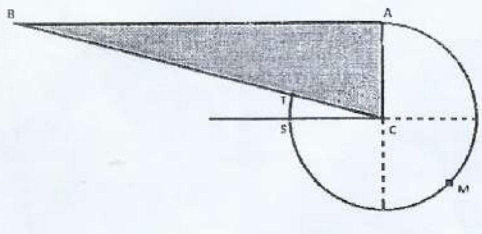
se pide:

(a) Determinar todas las $x \in D_f$ tales que $|f(x)| < 1$.

(b) Determinar, si existen, los ceros de la función $g \circ f^{-1}$

EJERCICIO 5:

Calcular el área del triángulo rectángulo CAB (sombreado), si se sabe que la longitud del arco de circunferencia AMT (no incluido en el triángulo) es de 57π cm, que AB paralelo a CS y el ángulo $\angle TCS = 15°$ (C es el centro de la circunferencia).

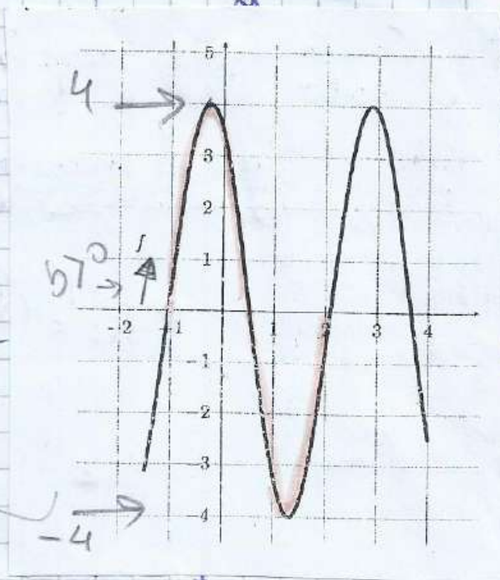


Seminario Universitario	Rec. 2° parcial T.T.	HOJA N° 1 / FECHA 15-3-25

① La figura representa la gráfica de una función sinusoidal f definida en el intervalo $[-1,5\,;\,4]$

Sabiendo que los primeros dos ceros que se observan tienen como abscisas, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{1}{6}\pi$.

Dar una expresión analítica de $f(x)$



$$f(x) = a\,\text{sen}(bx+c) \qquad \boxed{a=4}$$

$$f(x) = 4\,\text{sen}(bx+c)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} \to 1° \text{ cero} \\ x = \frac{\pi}{6} \to 2° \text{ cero} \end{array}\right\} \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2} \to T = \pi \qquad y \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\pi = \frac{2\pi}{|b|} \to |b| = 2 \qquad \boxed{b=2}$$

$$f(x) = 4\,\text{sen}(2x+c)$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0} = 4\,\text{sen}\left(2\frac{\pi}{6}+c\right) = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+c\right) = 0$$

$\neq 0 \to \quad = 0 \quad \text{sen}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 + \pi k$

tomo $k = 0$

$$c + \frac{\pi}{3} = 0 \to \boxed{c = -\frac{\pi}{3}}$$

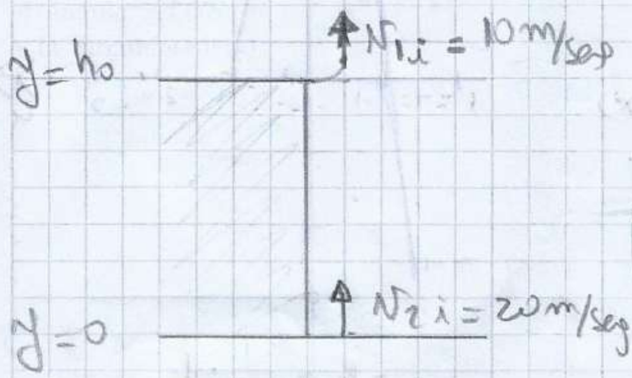
$$\boxed{f(x) = 4\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

NOTA

② a) Desde una altura h_0 se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con $v_0 = 10 m/s$.

Un segundo después de lanzada la 1° se lanza otra pelota desde el suelo sobre la misma vertical con $v_0 = 20 m/s$

Sabiendo que el encuentro entre ambas pelotas se produjo a los 6 segundos de lanzada la primera pelota, calcular el valor de h_0



(se lanza 1 seg después → $t-1$)

$$\boxed{y_1(t) = h_0 + 10\frac{m}{seg}t - 5\frac{m}{seg^2}t^2}$$

$$\boxed{y_2(t) = 20\frac{m}{s}(t-1) - 5\frac{m}{s^2}(t-1)^2}$$

a los 6 seg se encuentran → $y_1(6) = y_2(6)$

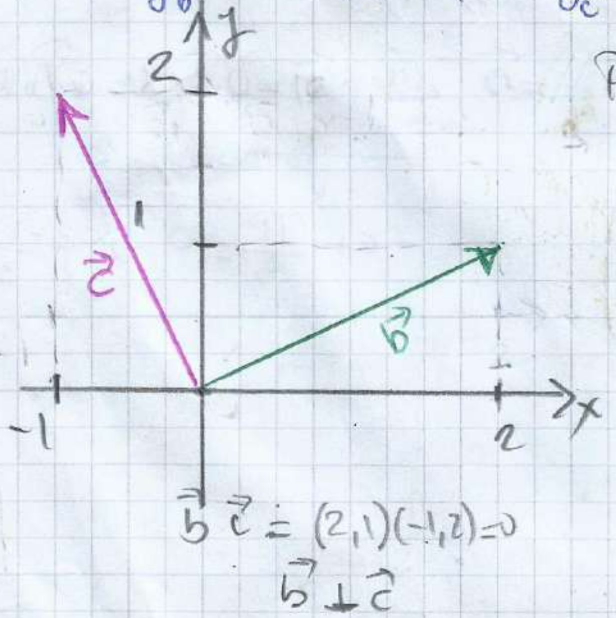
$$h_0 + 10\frac{m}{seg}6seg - 5\frac{m}{s^2}(6s)^2 = 20\frac{m}{s}(6-1) - 5\frac{m}{seg^2}(6-1)^2$$

$\boxed{h = 95m}$ $\{h_0 + 60m - 180m = 100m - 125m$

b) Calcular las componentes del vector $\vec{a}$ si se sabe que:

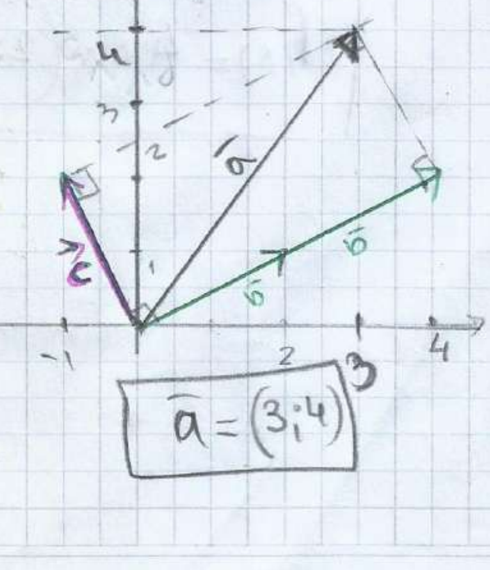
$Proy_{\vec{b}}\vec{a} = (4;2)$, $Proy_{\vec{c}}\vec{a} = \vec{c}$ siendo: $\vec{b} = (2,1)$ y $\vec{c} = (-1,2)$

$Proy_{\vec{b}}\vec{a} = (4;2) = 2(2;1) = 2\vec{b}$



$\vec{b}\,\vec{c} = (2,1)(-1,2) = 0$

$\vec{b} \perp \vec{c}$



$\boxed{\bar{a} = (3;4)}$

NOTA

Seminario Universitario	Recup. 2° parcial T.T	HOJA N° 2 FECHA 15-3-24

③ Sea $f : Df \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-5|-2}{x+3}}$

Calcular Df.

como f es una raíz $\Rightarrow$ $\dfrac{|x-5|-2}{x+3} \geq 0$

$|x-5|-2 \geq 0 \wedge x+3>0$ o $|x-5|-2 \leq 0 \wedge x+3<0$

$|x-5| \geq 2 \wedge x>-3$

si $x \geq 5$

$x-5 \geq 2 \wedge x>-3$

$\underbrace{x \geq 7 \wedge x>-3}$

$\boxed{x \geq 7}$

si $\underbrace{x \geq 5 \quad x<-3}$

$\varnothing$

si $x<5 \wedge x<-3$

$-x+5-2 \leq 0 \wedge x<-3$

$\underbrace{3 \leq x \wedge x<-3}$

$\varnothing$

si $x<5$

$-x+5-2 \geq 0 \wedge x>-3$

$\underbrace{3 \geq x \wedge x>-3}$

$\boxed{-3<x \leq 3}$

$$\boxed{S = (-3,3] \cup [7,+\infty)}$$

NOTA

④ Dadas las funciones $f: Df \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \log(x-2)$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = x^2 - 4$

Se pide:

a) Determinar todos los $x \in Df$ tales que $|f(x)| < 1$

$f(x) = \log(x-2) \longrightarrow x-2 > 0 \to x > 2 \to \boxed{Df = (2, +\infty)}$

$|f(x)| < 1 \implies -1 < f(x) < 1$

$-1 < \log(x-2) < 1$

a

$-1 < \log(x-2)$

$10^{-1} < 10^{\log(x-2)}$

$\frac{1}{10} < x-2$

$\frac{1}{10} + 2 < x$

$\boxed{\frac{21}{10} < x}$

b

$\log(x-2) < 1$

$10^{\log(x-2)} < 10^1$

$x-2 < 10$

$\boxed{x < 12}$

$$\boxed{S = \left(\frac{21}{10}, 12\right)}$$

b) Determinar, si existen, los ceros de la función $g \circ f^{-1}$

$f(x) = \log(x-2) = y \longrightarrow 10^{\log(x-2)} = 10^y \to x-2 = 10^y$

$x = 10^y + 2$

$\boxed{f^{-1}(x) = 10^x + 2}$

$g \circ f^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = g(10^x+2) = (10^x+2)^2 - 4 =$

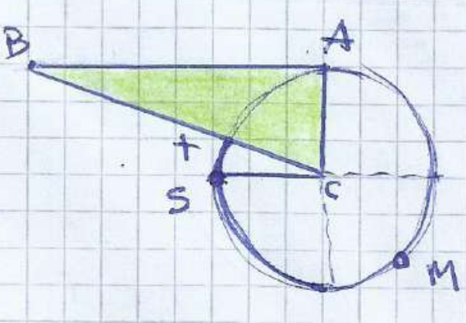
$= (10^x)^2 + 4 \times 10^x + \cancel{4} - \cancel{4} = \underbrace{10^{2x}}_{>0} + \underbrace{4 \times 10^x}_{>0}$

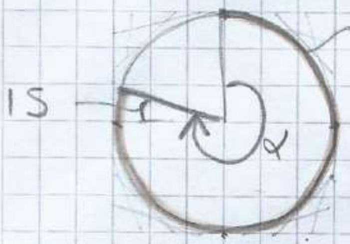
$\boxed{g \circ f^{-1} \text{ No tiene ceros en el conj. de los números reales}}$

NOTA

Seminario Universitario	Recup. 2° parcial	HOJA N° 3
		FECHA 15-3-24

(5) Calcular el área del triángulo rectángulo CAB (sombreado) si se sabe que la longitud de onda del arco de circunferencia AMT (no incluido el triángulo) es de 57π, que AB es paralelo a CS y el ángulo $\angle tcS = 15°$ (C es el centro de la circunferencia





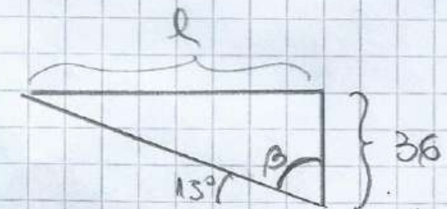
Arco $= 57\pi$

$\alpha = 270° + 15° = 285°$

$285° \_\_\_\_ 57\pi$

$360° \_\_\_\_ x = \dfrac{360° \cdot 57\pi}{285°} = 72\pi$

toda la circ. mide $72\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot 2r \rightarrow \boxed{r = 36}$



$\beta = 90° - 15° = 75°$

$tg(\beta) = \dfrac{op}{ady \rightarrow 36}$

$tg(75°) \cdot 36 = l$

$\boxed{l = 72 + 36\sqrt{3}}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{r \cdot l}{2} = \dfrac{\overset{18}{\cancel{36}}(72 + 36\sqrt{3})}{\cancel{2}} \cong 2418{,}37$

$\boxed{A_{\triangle} = 2418}$

NOTA